STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-003

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. J. Popken

24 januari 1957

Functies in de elementaire getallenleer

1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1957-003

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr J. Popken

24 januari 1957

Functies in de elementaire getallenleer

Notaties: n,m natuurlijke getallen;
(n,m) G.G.D. van n en m;
d,d' meestal delers van n of m;
p,p_i priemgetallen;

(1) $n=p_1^{k_1} p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}$ ontbinding van n in priemfactoren;

[x] = "entier" van x = grootste gehele getal $\leqslant x$;
een lege som is steeds nul, een leeg product steeds 1 gesteld;
f(n), g(n), h(n) arithmetische functies,
d.w.z. functies gedefinieerd op de verzameling van de natuurlijke getallen; soms kortweg aangeduid door f,g,h.

§ 1. Voorbeelden:

1) Het aantal delers van n

$$\tau(n) = \sum_{d/n} 1.$$

Uit de ontbinding (1) voor n volgt

(2) $$\tau(n) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_r+1).$$

Bijvoorbeeld is $\tau(60) = \tau(2^2.3.5) = 3.2.2 = 12$. Blijkbaar volgt uit (2)

$$\tau(nm) = \tau(n)\,\tau(m) \quad \text{voor } (n,m) = 1,$$

m.a.w. $\tau(n)$ is multiplicatief.

2) Het product van alle delers van n

$$P(n) = \prod_{d/n} d.$$

Nu is

$$P^2(n) = \prod_{d/n} d \cdot \prod_{d/n} \frac{n}{d} = n^{\tau(n)},$$

m.a.w. het geometrisch gemiddelde G(n) van alle delers van n is $\sqrt{n}$.

3) De som van alle delers van n

$$\sigma(n) = \sum_{d/n} d.$$

Ook deze functie is multiplicatief (zie §4, 1)). Is dus n gegeven door (1), dan volgt

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1})\,\sigma(p_2^{k_2})\ldots\sigma(p_r^{k_r}) = \prod_{p/n} \frac{p^{k+1}-1}{p-1},$$

b.v.

$$\sigma(220) = \sigma(2^2.5.11) = (2^3-1)(5+1)(11+1) = 504,$$
$$\sigma(284) = \sigma(2^2.71) = (2^3-1)(71+1) = 504.$$

(Bovendien is 504=220+284; op deze merkwaardige samenhang komen we later terug).

4) Het arithmetisch gemiddelde van alle delers van n

$$A(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}.$$

Wegens $A(n) \geqslant G(n) = \sqrt{n}$, volgt dus $\sigma(n) \geqslant \tau(n)\sqrt{n}$.

5) Men kan ook nog het harmonisch gemiddelde H(n) van alle delers van n invoeren en men vindt dan gemakkelijk $A(n)H(n)=n=G^2(n)$.

6) De functie van Euler $\varphi(n)$ = het aantal getallen m in de rij 1,2,...,n met (m,n)=1, dus $\varphi(1)=1$. Ook $\varphi(n)$ is multiplicatief.

Multiplicatieve functies spelen een grote rol in deze theorie. Is f(n) een multiplicatieve functie en niet de nulfunctie 0(n) (d.w.z. =0 voor elke n), dan is f(1)=1.

In het volgende staatje zijn de waarden van enkele arithmetische functies f(n) opgenomen voor n=1,2,...,12. Hier komt ook de functie van Möbius voor, welke later zal worden ingevoerd (§4, 3)).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0

§2. Historische opmerkingen. De functie $\sigma(n)$ is van belang voor de studie van de z.g. volkomen getallen, bevriende getallen, enz., begrippen welke hun oorsprong in de getallenmagie der oude tijden vonden. Een getal n heet volkomen als het getal gelijk is aan de som van zijn "aliquote" delen, d.w.z. gelijk aan de som van alle delers met uitzondering van n zelf; nog anders gezegd als $\sigma(n)=2n$ is. Voorbeel-

den zijn $6=1+2+3$ en $28=1+2+4+7+14$. God schiep hemel en aarde in zes dagen, terwijl de maanperiode 28 dagen is. Was van een getal n de som van de aliquote delen groter dan n, dan heette het getal "abundant", was de som kleiner dan n, dan sprak men van een "deficient" getal. Zo is 12 abundant en 8 deficient. Volgens Alcuin, de leermeester van Karel de Grote, was het mensengeslacht onvolkomen, omdat dit afstamde van de acht zielen in de ark van Noach [1] .

Stelling van Euclides: Is 2^n-1 priem (z.g. priemgetal van Mersenne), dan is $P=2^{n-1}(2^n-1)$ een volkomen getal. Voorbeelden: $n=2$ geeft $P=6$, $n=3$ geeft $P=28$, $n=5$ geeft $P=496$.

Bewijs: $\sigma(P) = \sigma(2^{n-1})\,\sigma(2^n-1) = (2^n-1).2^n=2P$.

Men toont gemakkelijk aan, dat men zo alle even volkomen getallen vindt [2]. Oneven volkomen getallen zijn er zeker niet beneden 2000 000. Men weet niet eens of zulke getallen bestaan.

Nauw verwant hiermee zijn de paren van bevriende getallen. Een getallenpaar (n,m) heet bevriend als elk van beide gelijk is aan de som van de aliquote delen van de andere; m.a.w. als $n= \sigma(m)-m$, en $m= \sigma(n)-n$; dus als

$$\sigma(m) = \sigma(n) = n + m.$$

Zo zijn 220 en 284 bevriende getallen (zie §1,3)). Deze twee getallen speelden vroeger een grote rol in de magie en astrologie, b.v. voor het maken van minnedranken, talismans en van horoscopen [3] .

Permat, Mersenne, Descartes en vele anderen hebben zich intensief bezig gehouden met het zoeken van volkomen getallen en van paren bevriende getallen. Een Italiaanse schooljongen vond het bevriende paar $1184 = 2^5.37$, $1210 = 2.5.11^2$.

§3. Convoluties [4]. Het is ons doel een soort algebra voor arithmetische functies te ontwikkelen. Van fundamentele betekenis daarvoor is de z.g. convolutie van twee arithmetische functies f(n) en g(n). Hieronder verstaan we een nieuwe arithmetische functie:

$$f(n) * g(n) = \sum_{dd'=n} f(d)\, g(d').$$

Voorbeelden: Zij

$$o(n) = 0 \text{ voor elke } n$$
$$e(n) = \begin{cases} 1 \text{ voor } n=1 \\ 0 \text{ voor } n>1 \end{cases}$$
$$E(n) = 1 \text{ voor elke } n.$$

Dan is

$$O(n) * f(n) = O(n)$$
$$e(n) * f(n) = f(n)$$
$$E(n) * f(n) = \sum_{d/n} f(d) \quad \text{(z.g. somfunctie).}$$

Uit de laatste formule volgt:

(2) $$E(n) * E(n) = \tau(n), \quad E(n) * n = \sigma(n).$$

Uit de definitie volgt gemakkelijk, dat de convolutie een commutatieve en associatieve bewerking is:

$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Bovendien is de bewerking distributief ten opzichte van de optelling:

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Uit het voorgaande volgt: De arithmetische functies vormen een commutatieve ring met eenheidselement voor de bewerkingen + en $*$. Het nulelement is $O(n)$, eenheidselement is $e(n)$.

Is $f(1) \neq 0$, dan kan men eenvoudig aantonen, dat $f(n)$ voor de bewerking $*$ ook een inverse $f^{-1}(n)$ bezit, d.w.z. een eenduidig bepaalde arithmetische functie $f^{-1}(n)$, zodat

$$f^{-1}(n) * f(n) = e(n).$$

Voorbeeld: $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = f(4) = \ldots = 0$ heeft als inverse:

$$f^{-1}(2^k) = (-1)^k, \quad f^{-1}(n) = 0 \text{ als } n \text{ geen macht van } 2.$$

Zijn $f(n)$, $g(n)$ twee arithmetische functies met $f(1) \neq 0$, dan kunnen we ook een convolutiequotient invoeren, gedefinieerd door

$$\frac{g(n)}{f(n)} = g(n) * f^{-1}(n)$$

en dan volgen gemakkelijk regels als

$$f * \frac{g}{f} = g, \quad h * \frac{g}{f} = \frac{h*g}{f}, \quad \frac{g}{f} + \frac{h}{f} = \frac{g+h}{f}.$$

Fundamenteel is de volgende

Stelling: Zijn f en g multiplicatief, dan is dit ook het geval met $f * g$ en $\frac{g}{f}$ (in het laatste geval mag f natuurlijk niet de nulfunctie voorstellen).

Het bewijs van de bewering voor $f * g$ berust op de eigenschap: Zijn n en m onderling ondeelbaar, doorloopt d_1 de verschillende delers van n en d_2 onafhankelijk daarvan de verschillende delers van m, dan doorloopt $d_1 d_2$ de verschillende delers van nm, elke deler juist één keer.

§4. Toepassingen.

1) Uit (2) volgt dat $\tau(n)$ en $\sigma(n)$ multiplicatief zijn, omdat $E(n)$ en de functie $f(n)=n$ dat zijn.

2) Uitgaande van de multiplicativiteit van $\varphi(n)$, besluit men tot die van $E(n) * \varphi(n)$. Men vindt dan

$$(3) \qquad E(n) * \varphi(n) = n \text{ of } \sum_{d/n} \varphi(d) = n.$$

3) De functie $\mu(n) = E^{-1}(n)$ is multiplicatief. Men noemt haar de functie van Möbius. Hiervoor geldt dus

$$(4) \qquad \mu(n) * E(n) = e(n) \text{ of } \sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ als } n=1 \\ 0 \text{ als } n>1 \end{cases}$$

Uit het feit, dat $\mu(n)$ multiplicatief is en uit (4) volgt eenvoudig

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{als } n=p_1p_2\ldots p_r \\ 0 & \text{als n meervoudige priemfactoren bevat.} \end{cases}$$

4) De z.g. omkeerstelling van Möbius luidt:

Uit $g(n) = \sum_{d/n} f(d)$ volgt $f(n) = \sum_{d/n} \mu(d)g(\frac{n}{d})$.

Bewijs: Het gegeven luidt symbolisch

$$g = E * f,$$

convolutie met μ geeft

$$\mu * g = \mu * E * f = e * f = f$$

en dit was te bewijzen.

5) Vele betrekkingen, die men doorgaans met behulp van de omkeerstelling bewijst toont men sneller met het convolutieformalisme aan. Volgens (3) is b.v. $E(n) * \varphi(n) = n$; dus

$$\varphi(n) = \mu(n) * E(n) * \varphi(n) = \mu(n) * n$$

of

$$\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d} .$$

Hieruit volgt weer

$$\varphi(n) = n(1- \frac{1}{p_1})(1- \frac{1}{p_2})\ldots(1- \frac{1}{p_r}).$$

Analoog leveren de formules (2)

$$\sum_{d/n} \mu(d)\, \tau(\frac{n}{d}) = 1. \quad \sum_{d/n} \mu(d)\, \sigma(\frac{n}{d}) = n.$$

§5. Een somformule: x zij steeds een positief getal

$$\sum_{n=1}^{x} \ldots \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{n=1}^{[x]} \ldots$$

We hebben

$$\sum_{n=1}^{x} f(n)*g(n) = \sum_{dd' \leqslant x} f(d)g(d')$$

$$= \sum_{d=1}^{x} f(d) \sum_{d'=1}^{x/d} g(d');$$

in het bijzonder volgt hieruit voor g(n)=E(n)

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{x} f(n)*E(n) = \sum_{d=1}^{x} \left[\frac{x}{d}\right] f(d).$$

Deze formules zijn vaak nuttig. Hoe men deze kan toepassen blijkt b.v. uit de volgende twee voorbeelden:

1) Uit (5) met $f(n) = \mu(n)$ volgt

$$\sum_{d=1}^{x} \left[\frac{x}{d}\right]\mu(d) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n)*E(n) = \sum_{n=1}^{x} e(n)=1 \qquad (x \geqslant 1)$$

$$2) \sum_{n=1}^{x} \frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{n=1}^{x} \sum_{d/n} \frac{d}{n} = \sum_{n=1}^{x} E(n)*\frac{1}{n}.$$

Toepassing van (5) met $f(n) = \frac{1}{n}$ geeft

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d=1}^{x} \left[\frac{x}{d}\right] \frac{1}{d} < \sum_{d=1}^{\infty} \frac{x}{d^2} = \frac{\pi^2}{6}x.$$

Iets precieser berekening geeft

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} x + O(x) \text{ als } x \longrightarrow \infty.$$

Andere toepassingen vindt men in [4].

§6. "Differentiëren". $f'(n) \overset{\text{def}}{=\!=} f(n) \log n$

Voorbeelden: $e'(n) = O(n)$, $E'(n) = \log n$.

Men bewijst gemakkelijk

$$(f*g)' = f'*g + f*g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g*f'-f*g'}{g*g} \qquad (g(1)\neq 0).$$

Van fundamentele betekenis is de "logarithmische afgeleide" van E(n), n.l.

(6) $$\Lambda(n) \overset{\text{def}}{=} \frac{E'(n)}{E(n)} = \mu(n) * E(n)' = \mu(n) * \log n.$$

De functie $\Lambda(n)$ heeft een merkwaardige eigenschap, n.l. $\Lambda(n)=0$ voor elke n, welke door meer dan één priemgetal deelbaar is. We bewijzen deze eigenschap algemener voor een klasse van functies $f(n)=\mu(n)*h(n)$, waar h(n) een <u>additieve</u> functie is, d.w.z.

$$h(nm) = h(n) + h(m) \quad \text{voor } (n,m) = 1.$$

Immers dan is voor $n>1$, $m>1$

$$\begin{aligned} f(nm) &= \sum_{d_1/n,\, d_2/m} \mu(d_1 d_2)\, h\left(\frac{nm}{d_1 d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1/n,\, d_2/m} \mu(d_2)\, \mu(d_1)\, h\left(\frac{n}{d_1}\right) + \\ &\quad \sum_{d_1/n,\, d_2/m} \mu(d_1)\, \mu(d_2)\, h\left(\frac{m}{d_2}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegens (4) [1].

Uit de definitie (5) volgt verder $\Lambda(1)=0$ en $\Lambda(p^k) = \mu(1)\log p^k + \mu(p)\log p^{k-1} = \log p$. Dus

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \text{ voor } n=p^k (k \geqslant 1) \\ 0 \quad \text{anders.} \end{cases}$$

Deze functie speelt een grote rol in de theorie der priemgetallen. De priemgetalstelling is n.l. equivalent met

$$\sum_{n=1}^{x} \Lambda(n) \sim x \quad \text{voor} \quad x \longrightarrow \infty.$$

§7. <u>Reeksen van Dirichlet</u>. Elke arithmetische functie f(n) genereert een (al of niet convergente) reeks van Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s}.$$

Is $h(n) = f(n) * g(n)$, dan is

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(n)\, n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, n^{-s},$$

m.a.w. met de convolutie komt het product van de bijbehorende reeksen overeen.

---

1) Nog algemener: Is g(n) een multiplicatieve en h(n) een additieve functie en stelt men $f(n)=g(n)*h(n)$ en $G(n)=g(n)*E(n)$, dan geldt voor $(n,m)=1$

$$f(nm) = G(m)\, f(n) + G(n)\, f(m).$$

Deze relatie is analoog aan de bekende formule

$$\mathcal{L}(f(x) * g(x)) = \mathcal{L} f(x) \cdot \mathcal{L} g(x)$$

uit de theorie van de Laplace transformaties en kan daarvan zelfs als een speciaal geval worden opgevat.

We geven hier in een overzicht links enkele uitdrukkingen uit de theorie der convoluties en rechts de "vertaling" met behulp van reeksen van Dirichlet:

$E(n)$	$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$
$e(n)$	1
$\tau(n) = E(n) * E(n)$	$\sum_{1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} = \zeta^2(s)$
$\sigma(n) = E(n) * n$	$\sum_{1}^{\infty} \sigma(n) n^{-s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} n.n^{-s} = \zeta(s)\,\zeta(s-1)$
$\mu(n) = \frac{1}{E(n)}$	$\sum_{1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)}$
$E(n) * \varphi(n) = n$	$\sum_{1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$
$\Lambda(n) = \frac{E'(n)}{E(n)}$	$\sum_{1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$

Literatuur

[1] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II, Berlin 1922, 835.

[2] O. Ore, Number theory and its history, London 1948, 93-94.

[3] O. Ore, loc.cit, 96-98.

[4] J. Popken, On convolutions in number theory, Proceedings Kon. Akad.v.Wetensch., Series A, 58, No 1; Indag.Math.17, No.1, 19[illegible]